3/12/18

(SOS 1) Θεώρημα: Έστω ότι $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό,

διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$. Τότε:

(α) η $\bar{f}$ είναι συνεχής στο $\bar{x}$

(β) η $\bar{f}$ είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ με μερικές παραγώγους $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x}) = d_{ji}$ $\forall j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$

(Δηλ. αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, τότε ο D που ικανοποιεί το (*) είναι ο Ιακωβιανός πίνακας $J_f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f_j(\bar{x})}{\partial x_i}\right)_{1 \le j \le m,\ 1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, το οποίο συνεπάγεται και ότι ο D στο (*) είναι μοναδικός. Τον ονομάζουμε παράγωγο της $\bar{f}$ στο $\bar{x}$, τον συμβολίζουμε με:

$$Df(\bar{x}) = J\bar{f}(\bar{x}) \ (= D \text{ στο } (*))\Big)$$

Απόδειξη (α) $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \left(\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) \right) =$

$$= \lim_{\substack{\bar{h} \to \bar{0} \\ (\bar{h} \neq \bar{0})}} \left(\|\bar{h}\| \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|} + D\bar{h} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \|\bar{h}\|\right)}_{=0} \underbrace{\left(\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|}\right)}_{= \bar{0} \text{ (από υπόθεση (*))}} + \underbrace{\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} (D\bar{h})}_{= \bar{0} \text{ βλ. (**)}}$$

(**) $\|D\bar{h}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} (d_{11}, \dots, d_{1n})\bar{h} \\ \vdots \\ (d_{m1}, \dots, d_{mn})\bar{h} \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \left((d_{j1}, \dots, d_{jn})\bar{h} \right)^2 \le$

$\le \|(d_{j1}, \dots, d_{jn})\|^2 \cdot \|\bar{h}\|^2 \Rightarrow \|D\bar{h}\|^2 \le \|\bar{h}\|^2 \cdot \sum_{j=1}^{m} \|d_{j1}, \dots, d_{jn}\|^2$

$= \sum_{i=1}^{n} d_{ji}^2 \Rightarrow \|D\bar{h}\| \le \|\bar{h}\| \|D\| \Rightarrow \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} D\bar{h} = \bar{0}$ $\quad \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} d_{ji}^2 = \|D\|^2$

(b) (*) $\iff$ (***)

Έστω $j \in \{1,\dots,m\}$. Τότε έχουμε για $\bar{h}_\nu \to \bar{0}$:

$$\frac{f_j(\bar{x}+\bar{h}_\nu) - f(\bar{x}) - \cancel{D\bar{h}_\nu}}{\|\bar{h}_\nu\|}$$

Ειδικότερα για $\bar{h}_\nu = h_\nu \bar{e}_i$, όπου: $\bar{e}_i = (0,\dots,0,\underset{i\text{-θέση}}{1},0,\dots,0)$

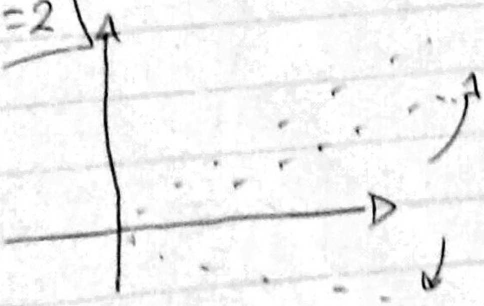
όπου $i \in \{1,\dots,n\}$ σταθερό και $h_\nu \neq 0$ με $h_\nu \to 0$

Προκύπτει: $$0 \leftarrow \frac{f_j(\bar{x}+h_\nu\bar{e}_i) - f_j(\bar{x}) - h_\nu \underbrace{(d_{j1},\dots,d_{jn})\bar{e}_i}_{=d_{ji}}}{\underbrace{\|h_\nu \bar{e}_i\|}_{=|h_\nu|}}$$

$\|\underset{\in\mathbb{R}}{a}\,\underset{\in\mathbb{R}^n}{\bar{v}}\| = |a|\,\|\bar{v}\|$ $\qquad \frac{a_\nu}{|h_\nu|}$

δηλ. $\frac{f_j(\bar{x}+h_\nu\bar{e}_i) - f_i(\bar{x})}{h_\nu}$ άρα: $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\bar{x}) = d_{ji}$

$\boxed{n=2}$



τυχαίες ακολουθίες $\bar{h}_\nu \to \bar{0}$

ακολουθίες $\bar{h}_\nu = h_\nu \underset{\in\mathbb{R}^n}{\vec{e_i}} \to \bar{0}$

[$\frac{a_\nu}{|h_\nu|} \to 0 \iff \left|\frac{a_\nu}{h_\nu}\right| \to 0 \iff \frac{a_\nu}{h_\nu} \to 0$ $\overset{\text{εδώ}}{\iff}$

$\frac{f_j(\bar{x}+h_\nu\bar{e}_i) - f(\bar{x})}{h_\nu} - d_{ji} \to 0$] ■

Παρατήρηση: Από αυτά που ξέρουμε μέχρι τώρα, για να δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, θα πρέπει να είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ και ο Ιακωβιανός πίνακας να ικανοποιεί το $(*)$.

[Αν η f δεν είναι συνεχής, τότε δεν είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x}$]

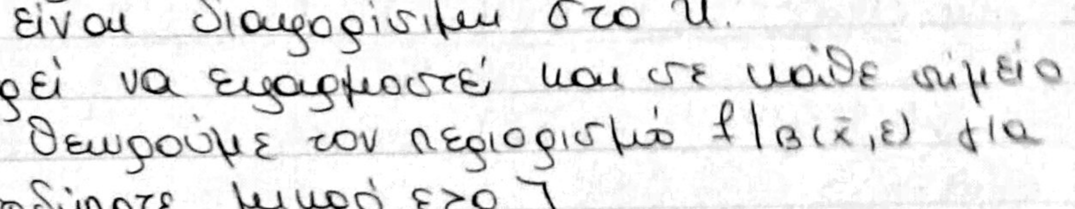
Υπάρχει, όμως, και άλλη μέθοδος, πιο πρακτική

SOS 2 **Θεώρημα** Έστω f μερικώς διαφορίσιμη στο $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοιχτό, και έστω ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f στο U είναι συνεχείς. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο U.
[Αυτό μπορεί να εφαρμοστεί και σε κάθε σημείο $\bar{x}$ του U: θεωρούμε τον περιορισμό $f|_{B(\bar{x},\varepsilon)}$ για κάποιο οσοδήποτε μικρό $\varepsilon>0$]

Απόδειξη: Έστω $\bar{x} \in U \Rightarrow \exists\, B(\bar{x},\delta_0) \subset U$ για κάποιο $\delta_0 > 0$. Έστω $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \in B(\bar{0},\delta_0) \setminus \{\bar{0}\}$ [$\Leftrightarrow 0 < \|\bar{h}\| < \delta_0$]. Τότε:

$$\bar{y}^{(k)} := \bar{x} + \sum_{i=1}^{k} h_i \bar{e}_i \quad \left(\in B(\bar{x},\delta_0) \subset U \right)$$

$\boxed{n=2}$



$\bar{y}^{(0)} := \bar{x}$ $\qquad \bar{x}+h_1\bar{e}_1 = \bar{y}^{(1)}$

$\Rightarrow \bar{y}^{(k)} - \bar{y}^{(k-1)} = h_k \bar{e}_k$, $k=1,\dots,n$ και θέτουμε

$\bar{y}^{(0)} := \bar{x}$

ΤΟΤΕ, από το ΘΜΤ (ΑΠΕΙΙ1), υπάρχουν $\theta_k \in [0,1]$

$\longrightarrow$

έτσι ώστε $\bar{f}(\bar{y}^{(k)}) - f(\bar{y}^{(k-1)}) = u_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \theta_k u_k \bar{e}_k)$

[$g(\theta) := f(\bar{y}^{(k-1)} + \theta u_k \bar{e}_k)$ $\theta \in [0,1]$ $\Rightarrow \exists \theta_k \in [0,1]$:
$g(1) - g(0) = g'(\theta_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(y^{(k-1)} + \theta_k u_k \bar{e}_k)\, \hat{u}_k$

4/12/18